

Le système T

Pascal MANOURY

29 novembre 2009

Donner une présentation du *système T* de Gödel et de sa preuve de normalisation.

Le langage x représente les variables.

$$t ::= x \mid \lambda x.t \mid (t t) \\ \mid \langle t, t \rangle \mid \pi_1 \mid \pi_2 \\ \mid 0 \mid S0 \mid \text{rec}$$

Les règles de calcul réduction (gauche)

$$\begin{array}{lll} (t u) & \hookrightarrow & (t' u) & \text{si } t \hookrightarrow t' \\ (v u) & \hookrightarrow & (v u') & \text{si } u \hookrightarrow u' \text{ et } v \text{ non réductible} \\ (\lambda x.t u) & \hookrightarrow & t[u/x] \\ \langle t, u \rangle & \hookrightarrow & \langle t', u \rangle & \text{si } t \hookrightarrow t' \\ \langle v, u \rangle & \hookrightarrow & \langle v, u' \rangle & \text{si } u \hookrightarrow u' \text{ et } v \text{ non réductible} \\ \pi_1 \langle t, u \rangle & \hookrightarrow & t \\ \pi_2 \langle t, u \rangle & \hookrightarrow & u \\ (\text{rec } 0 t_0 t_s) & \hookrightarrow & t_0 \\ (\text{rec } S t_0 t_s) & \hookrightarrow & (t_s t (\text{rec } t t_0 t_s)) \end{array}$$

On note \hookrightarrow^* la *clôture transitive et réflexive* de \hookrightarrow .

Un terme t est en *forme normale* lorsqu'il n'existe plus de t' tel que $t \hookrightarrow t'$. On appellera *valeur* un terme en forme normale.

Un terme t est *normalisable* lorsqu'il existe une valeur v telle que $t \hookrightarrow^* v$.

Commentaire: en reformulant les deuxième et cinquième règles de réduction sans leur restriction sur v

$$\begin{array}{lll} (t u) & \hookrightarrow & (t u') & \text{si } u \hookrightarrow u' \\ \langle t, u \rangle & \hookrightarrow & \langle t, u' \rangle & \text{si } u \hookrightarrow u' \end{array}$$

on obtient une relation de réduction *non déterministe* mais pour laquelle on a le résultat suivant :

THÉORÈME: (confluence) si t est normalisable et si $t \hookrightarrow^* t_1$ et si $t \hookrightarrow^* t_2$ alors, il existe w tel que $t_1 \hookrightarrow^* w$ et $t_2 \hookrightarrow^* w$.

Le langage de types

$$\tau ::= \mathbb{N} \mid \tau \rightarrow \tau \mid \tau \wedge \tau$$

Les règles de typage une *assignation de type* s'écrit $t : \tau$. Γ est un *contexte de typage* de la forme $x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n$ où les x_i sont des variables. On écrit $\Gamma, x : \tau$ pour $x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n, x : \tau$. Un contexte de typage Γ peut être vide. L'ordre d'apparition des assignations de type dans Γ n'est pas significatif. Un *jugement de typage* s'écrit $\Gamma \vdash t : \tau$. Lorsque Γ est vide, on écrit $\vdash t : \tau$.

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} Ax$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash u : \tau_1}{\Gamma \vdash (t u) : \tau_2} \rightarrow_e \qquad \frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \rightarrow_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2}{\Gamma \vdash \pi_1 t : \tau_1} \wedge_{e1} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2}{\Gamma \vdash \pi_2 t : \tau_2} \wedge_{e2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : \tau_1 \wedge \tau_2} \wedge_i$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \mathcal{N}} N_0 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \mathcal{N}}{\Gamma \vdash S t : \mathcal{N}} N_s$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathcal{N} \quad \Gamma \vdash t_0 : \tau \quad \Gamma \vdash t_s : \mathcal{N} \rightarrow \tau \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash (\text{rec } t t_0 t_s) : \tau} N_e$$

THÉORÈME: (conservation du type par réduction) si $t : \tau$ et si $t \xrightarrow{*} t'$ alors $t' : \tau$.

Le théorème de normalisation On définit une *interprétation des types* notée $\|\tau\|$ par induction sur la formation de τ :

- $\|\mathcal{N}\| = \{t \mid t \xrightarrow{*} S^n 0\}$
- $\|\tau_1 \wedge \tau_2\| = \{t \mid \exists t_1 \in \|\tau_1\|. \exists t_2 \in \|\tau_2\|. t \xrightarrow{*} \langle t_1, t_2 \rangle\}$
- $\|\tau_1 \rightarrow \tau_2\| = \{t \mid \forall u \in \|\tau_1\|. (t u) \in \|\tau_2\|\}$

REMARQUE: si $t \in \|\mathcal{N}\|$ alors $S t \in \|\mathcal{N}\|$

LEMME 1: (adéquation) si $t \in \|\tau\|$ alors t est normalisable.

Preuve: par induction sur τ

Si $\tau = \mathcal{N}$. alors t est normalisable par définition de $\|\mathcal{N}\|$.

Si $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$, alors, par définition de $\|\tau_1 \wedge \tau_2\|$, il existe $t_1 \in \|\tau_1\|$ et $t_2 \in \|\tau_2\|$ tels que $t \xrightarrow{*} \langle t_1, t_2 \rangle$. Par hypothèse d'induction, t_1 et t_2 sont normalisables. Il existe donc deux valeurs v_1 et v_2 telles $t \xrightarrow{*} \langle t_1, t_2 \rangle \xrightarrow{*} \langle v_1, v_2 \rangle \xrightarrow{*} v$. Comme $\langle v_1, v_2 \rangle$ est une valeur, t est normalisable.

Si $\tau = \tau_1 \rightarrow \tau_2$, alors, par définition de $\|\tau_1 \rightarrow \tau_2\|$, pour tout $u \in \|\tau_1\|$, $(t u) \in \|\tau_2\|$. Par hypothèse d'induction il existe v tel que $(t u) \xrightarrow{*} v$. Par définition de la réduction (gauche) il existe nécessairement une valeur v_1 telle que $t \xrightarrow{*} v_1$.

LEMME 2: (saturation) si $t \xrightarrow{*} t'$ et si $t' \in \|\tau\|$ alors $t \in \|\tau\|$.

Preuve: par induction sur τ .

Si $\tau = \mathcal{N}$. Si $t \xrightarrow{*} t'$ et $t' \in \|\mathcal{N}\|$ alors $t \xrightarrow{*} t' \xrightarrow{*} S^n 0$. D'où $t \in \|\mathcal{N}\|$.

Si $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ et $t' \in \|\tau_1 \wedge \tau_2\|$ alors il existe $t_1 \in \|\tau_1\|$ et $t_2 \in \|\tau_2\|$ tels que $t \xrightarrow{*} t' \xrightarrow{*} \langle t_1, t_2 \rangle$. D'où $t \in \|\tau_1 \wedge \tau_2\|$.

Si $\tau = \tau_1 \rightarrow \tau_2$. On suppose $t \xrightarrow{*} t'$ et $t' \in \|\tau_1 \rightarrow \tau_2\|$. Par définition de la réduction, on a $(t u) \xrightarrow{*} (t' u)$ et, par définition de $\|\tau_1 \rightarrow \tau_2\|$, on a que pour tout $u \in \|\tau_1\|$, $(t' u) \in \|\tau_2\|$. Donc, par hypothèse d'induction : $t \in \|\tau_1 \rightarrow \tau_2\|$.

LEMME 3: si $x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n \vdash t : \tau$ alors, pour tous $u_1 \in \|\tau_1\|, \dots, u_n \in \|\tau_n\|$, on a $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in \|\tau\|$.

Preuve: par induction sur la dérivation de typage. On pose $\Gamma = x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n$. On note $t[\bar{u}/\bar{x}] = t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$ pour tous $u_1 \in \|\tau_1\|, \dots, u_n \in \|\tau_n\|$. On raisonne sur la dernière règle appliquée.

Règle Ax . Le terme t est une variable dans x_1, \dots, x_n , disons x_j . On a

$$\frac{}{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n \vdash x_j : \tau_j} Ax$$

Comme $x_j[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] = u_j$, le résultat est immédiat par hypothèse.

Règle \rightarrow_i . La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma, x : \tau \vdash t : \tau' \end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau \rightarrow \tau'} \rightarrow_i$$

On veut $(\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}] \in \tau \rightarrow \tau'$. C'est-à-dire, que pour tout $u \in \|\tau\|$, $((\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}] u) \in \|\tau'\|$. Et, comme $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, on veut, en fait : $(\lambda x.t[\bar{u}/\bar{x}] u) \in \|\tau'\|$ (on peut toujours supposer x non libre dans \bar{u}). Or $(\lambda x.t[\bar{u}/\bar{x}] u) \hookrightarrow t[\bar{u}/\bar{x}, u/x]$ et, par hypothèse d'induction, $t[\bar{u}/\bar{x}, u/x] \in \|\tau'\|$. D'où, par le lemme de saturation : $((\lambda x.t)[\bar{u}/\bar{x}] u) \in \|\tau'\|$.

Règle \rightarrow_e . La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash t : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash u : \tau_1 \end{array}}{\Gamma \vdash (t u) : \tau_2} \rightarrow_e$$

Par hypothèse d'induction, $t[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_1 \rightarrow \tau_2\|$. C'est-à-dire que pour tout $w \in \tau_1$, $(t[\bar{u}/\bar{x}] w) \in \|\tau_2\|$. Comme, par hypothèse d'induction, $u[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_1\|$, on a en particulier que $(t[\bar{u}/\bar{x}] u[\bar{u}/\bar{x}]) \in \|\tau_2\|$. Et, comme $(t[\bar{u}/\bar{x}] u[\bar{u}/\bar{x}]) = (t u)[\bar{u}/\bar{x}]$, on a $(t u)[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_2\|$ c'est ce que l'on veut.

Règle \wedge_i . La dérivation est de la forme

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash t_2 : \tau_2 \end{array}}{\Gamma \vdash \langle t_1, t_2 \rangle : \tau_1 \wedge \tau_2} \wedge_i$$

Par hypothèse d'induction $t_1[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_1\|$ et $t_2[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_2\|$. D'où, par définition, $\langle t_1[\bar{u}/\bar{x}], t_2[\bar{u}/\bar{x}] \rangle \in \|\tau_1 \wedge \tau_2\|$. Et, comme $\langle t_1[\bar{u}/\bar{x}], t_2[\bar{u}/\bar{x}] \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle[\bar{u}/\bar{x}]$, on a $\langle t_1, t_2 \rangle[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_1 \wedge \tau_2\|$ qui est ce que l'on veut.

Règle \wedge_{e1} . La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash t : \tau_1 \wedge \tau_2 \end{array}}{\Gamma \vdash \pi_1 t : \tau_1} \wedge_{e1}$$

Par hypothèse d'induction $t[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau_1 \wedge \tau_2\|$. Par définition, il existe $t_1 \in \|\tau_1\|$ et $t_2 \in \|\tau_2\|$ tels que $t[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow \langle t_1, t_2 \rangle$. D'où $(\pi_1 t)[\bar{u}/\bar{x}] = \pi_1 t[\bar{u}/\bar{x}] \hookrightarrow \pi_1 \langle t_1, t_2 \rangle \hookrightarrow t_1 \in \|\tau_1\|$ qui est ce que nous voulons.

Règle \wedge_{e2} . Similaire au cas précédent.

Règle N_0 . La dérivation est

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : N} N_0$$

Alors $t[\bar{u}/\bar{x}] = 0 \in \|N\|$.

Règle N_s . La dérivation a la forme

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash t : \mathcal{N} \end{array}}{\Gamma \vdash \text{St} : \mathcal{N}} N_s$$

Par hypothèse d'induction $t[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\mathcal{N}\|$. D'où $(\text{St})[\bar{u}/\bar{x}] = \text{St}[\bar{u}/\bar{x}] \stackrel{c^*}{\rightsquigarrow} \text{SS}^n \mathbf{0}$. Et comme $\text{S}^{n+1} \mathbf{0} \in \|\mathcal{N}\|$ par définition, on a, par le lemme de saturation, que $(\text{St})[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\mathcal{N}\|$ qui est ce que nous voulons.

Règle \mathcal{N}_e . La dérivation est de la forme

$$\frac{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma \vdash t : \mathcal{N} & \Gamma \vdash t_0 : \tau & \Gamma \vdash t_s : \mathcal{N} \rightarrow \tau \rightarrow \tau \end{array}}{\Gamma \vdash (\text{rec } t \ t_0 \ t_s) : \tau} N_e$$

Par hypothèse d'induction

1. $t[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\mathcal{N}\|$
2. $t_0[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau\|$
3. $t_s[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\mathcal{N} \rightarrow \tau \rightarrow \tau\|$

Avec l'hypothèse 1. on obtient $(\text{rec } t \ t_0 \ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] = (\text{rec } t[\bar{u}/\bar{x}] \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \stackrel{c^*}{\rightsquigarrow} (\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}])$. On montre alors par induction sur n que $(\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in \|\tau\|$.

Si $n = 0$, alors $(\text{rec } \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \hookrightarrow t_0[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau\|$ par hypothèse 2. Et donc, par saturation, $(\text{rec } \mathbf{0} \ t_0 \ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \in \|\tau\|$.

Si $n = n + 1$, $(\text{rec } \text{S}^{n+1} \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \hookrightarrow (t_s[\bar{u}/\bar{x}] \ \text{S}^n \mathbf{0} \ (\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]))$. Par hypothèse d'induction sur n : $(\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in \|\tau\|$. Par définition, $\text{S}^n \mathbf{0} \in \|\mathcal{N}\|$. Et donc, par définition de $\|\mathcal{N} \rightarrow \tau \rightarrow \tau\|$ et par hypothèse 3., $(t_s[\bar{u}/\bar{x}] \ \text{S}^n \mathbf{0} \ (\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}])) \in \|\tau\|$. Ce qui nous donne, par saturation que $(\text{rec } \text{S}^{n+1} \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in \|\tau\|$.

On conclut le cas de la règle \mathcal{N}_e ainsi : puisque $(\text{rec } t \ t_0 \ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \stackrel{c^*}{\rightsquigarrow} (\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}])$ et que $(\text{rec } \text{S}^n \mathbf{0} \ t_0[\bar{u}/\bar{x}] \ t_s[\bar{u}/\bar{x}]) \in \tau$, le lemme de saturation nous donne que $(\text{rec } t \ t_0 \ t_s)[\bar{u}/\bar{x}] \in \tau$ qui est ce que nous voulons.

THÉORÈME: (normalisation) si $\vdash t : \tau$ est dérivable alors t est normalisable.

Preuve: par le lemme ci-dessus, si $\vdash t : \tau$ est dérivable alors $t \in \|\tau\|$. Et, par le lemme d'adéquation, t est normalisable.