ÉLÉMENT DE PORTFOLIO 03

Publication

1 DÉFINITION DE CET ÉLÉMENT

Titre de l'élément : “Linear size MIP formulation of Max-Cut : new properties, links with cycle inequalities and computational results”, Viet Nguyen et Michel Minoux, *Optimization Letters*, 2021.

URL de l'élément : https ://hal.uca.fr/hal-03018187

2 MOTIVATIONS DU CHOIX DE CET ÉLÉMENT

Le Problème de la Coupe Maximum (MaxCut Problem - PCM) est un des problèmes fondamentaux les plus étudiés en Optimisation Combinatoire. Il est un des 21 problèmes NP-difficiles de la liste établie par Richard Karp. Le PCM est connu pour son caractère interdisciplinaire notamment via son application pour le calcul de l'état minimum de la fonction d'énergie (la Hamiltonienne) dans un modèle d'Ising qui est aussi un problème fondamental en physique statistique. Depuis cinquante ans, beaucoup de travaux sont dédiés à la résolution exacte et approchée du PCM. Certains de ces travaux ont permis de nouvelles avancées méthodologiques en Optimisation Combinatoire comme l'utilisation de la programmation semi-définie (SDP) ou du calcul quantique. Du fait de cette riche littérature sur le PCM, il devient donc très difficile d'obtenir de nouvelles méthodes pour la résolution du PCM. Pour cette raison, nous souhaitons mettre en avant notre découverte structurelle sur une formulation étendue du PCM [1]. Ce nouveau résultat a notamment impliqué un nouveau paradigme de branchement permettant une amélioration substantielle dans la résolution exacte des instances creuses du PCM.

3 PRÉSENTATION DE CET ÉLÉMENT

Une instance du PCM correspond à un graphe dont les arêtes sont pondérées. A une bipartition de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles, on fait correspondre une coupe qui est l'ensemble des arêtes ayant les extrémités réparties dans chacun des sous-ensembles de la bipartition. Le but du PCM est de trouver la coupe de poids maximum. Les instances creuses du PCM correspondent aux graphes dont le nombre des arêtes est proportionnel au nombre de sommets. En revanche, les instances denses sont celles qui correspondent aux graphes dont le nombre d'arêtes est proportionnel au nombre des sommets au carré.

Les travaux sur la résolution exacte du PCM reposent souvent sur des techniques de la programmation mathématique, notamment sur les formulations en Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) ou en Programme Binaire Quadratique (PBQ). La formulation PBQ possède une relaxation SDP de très bonne qualité utilisée par les solveurs SDP de PCM comme BiqMac ou BiqCrunch. Bien que ces derniers offrent les meilleures performances sur les instances denses du PCM mais en raison de la capacité de la programmation SDP, la taille de ces instances en nombre de sommets ne dépasse pas pour le moment 1000 sommets. L'approche d'algorithmes de Branch-and-Cut utilisant des formulations PLNE est mieux adaptée aux instances creuses de grande taille en nombre de sommets de PCM. Cette approche a permis notamment de résoudre des instances creuses ayant des dizaines de milliers de sommets. La formulation PLNE la plus utilisée pour PCM est celle donnée par Barahona et Mahjoub 1986 avec les variables associées aux arêtes et les inégalités des cycles. De façon classique, cette formulation PLNE est utilisée dans les algorithmes de Branch-and-Cut pour PCM avec le branchement sur les variables associées aux arêtes et la génération des inégalités de cycle.

En revanche, il existe des formulations étendues PLNE dans lesquelles les variables associées aux sommets sont ajoutées. Probablement en raison de la faiblesse de la relaxation linéaire, ces formulations sont negligées dans la littérature et ne sont pas utilisées dans les algorithmes de Branch-and-Cut pour PCM. Dans [1], nous avons montré que l'utilisation des formulations étendues PLNE dans un algorithme Branch-and-Cut pour PCM peut être très utile. En particulier, nous avons montré que sur les instances creuses brancher sur une variable associée à un sommet peut être équivalent à brancher sur un grand nombre de variables associées aux arêtes et à la génération d'un nombre exponentiel d'inégalités de cycles. Cette stratégie de branchement peut donc améliorer grandement la performance des algorithmes de Branch-and-Cut pour PCM, notamment pour les instances creuses.

Récemment, in [2], Charfreitag et al. ont conçu le logiciel McSparse (http ://mcsparse.uni-bonn.de) dédié à la résolution exacte des instances creuses de PCM où ils intègrent les paradigmes et les techniques les plus avancées développées dans la littérature sur les algorithmes de Branch-and-Cut pour PCM. Un des ingrédients clés de McSparse est l'utilisation de la stratégie de branchement sur les variables associées aux sommets avec la formulation étendue PLNE comme nous avons préconisé dans [1]. Voici un extrait de la section 3.3. de [2] où Charfreitag et al. décrit l'idée dans notre article [1].

> For the 'branch and cut' phase, [Nguyen & Minoux, 2021] advocate to extend the MaxCut formulation from Section 2.1 by introducing binary node variables z_v for all $v \in V$ as well as for each edge $e = ij \in E$ the four inequalities $x_{ij} + z_i + z_j \leq 2$, $x_{ij} - z_i - z_j \leq 0$, $-x_{ij} + z_i - z_j \leq 0$, and $-x_{ij} - z_i + z_j \leq 0$. These link the values of the node and edge variables in the sense that in any integer solution the node sets $\{v \in V \mid z_v = 1\}$ and $\{v \in V \mid z_v = 0\}$ represent the two shores of the cut defined by the edge set $\{e \in E \mid x_e = 1\}$.

Voici un autre extrait de la section 5.3. de [2] où les auteurs constatent que le temps de CPU augmente significativement sans la stratégie de branchement sur les variables associées aux sommets préconisée dans notre article [1] :

> We are not aware of other computational studies in the realm of polyhedral branch-and-cut that investigate the performance of an extended formulation along with the branching priorities on the corresponding node variables. In Table 5 we observe what happens if we omit the introduction of the extended formulation and branch on edge variables only, like done, e.g., in [3, 4, 42, 43, 24]. This concerns only the instances that need a b&c-phase in Table 2. We observe a significant total computation time increase.

4 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Nguyen, V. & Minoux, M. Linear size MIP formulation of Max-Cut : new properties, links with cycle inequalities and computational results. *Optimization Letters*. **15**, 1041-1060 (2021), https ://doi.org/10.1007/s11590-020-01667-z

[2] Charfreitag, J., Jünger, M., Mallach, S. & Mutzel, P. McSparse : Exact Solutions of Sparse Maximum Cut and Sparse Unconstrained Binary Quadratic Optimization Problems. *2022 Proceedings Of The Symposium On Algorithm Engineering And Experiments (ALENEX)*. pp. 54-66.